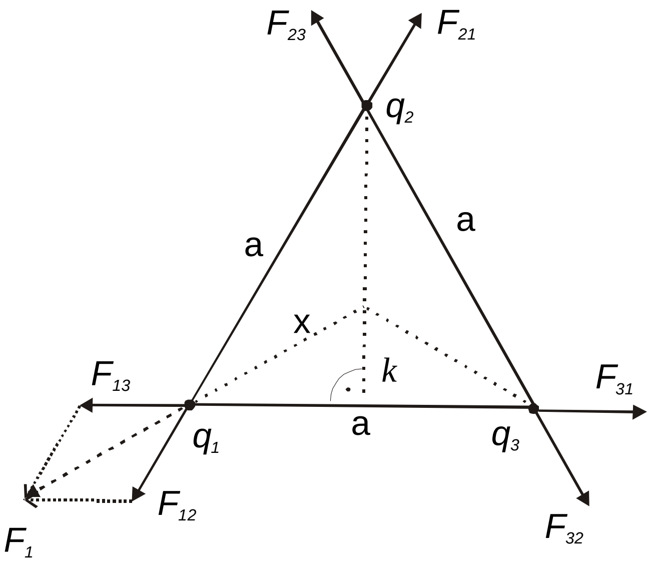
Zadania z fizyki – Sucha Beskidzka 2005/2006
Pole elektryczne, prąd elektryczny, pole magnetyczne

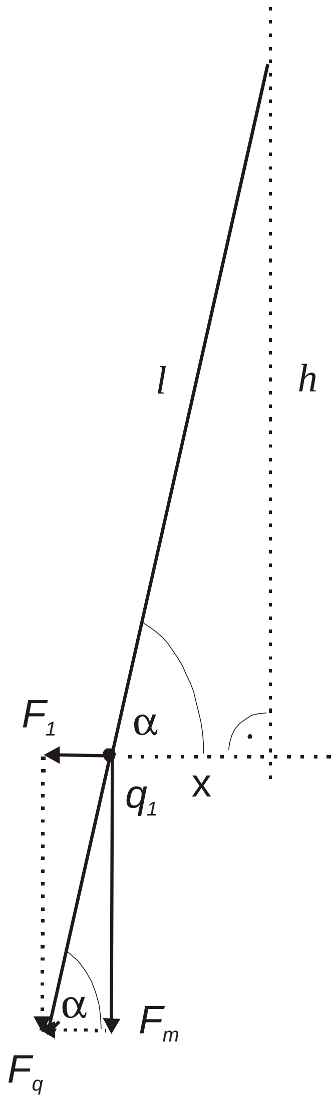
Zad. 1. Trzy małe kulki, każda o masie m=10g zawieszone są w jednym punkcie na oddzielnych nitkach jedwabnych o długości l=1 m. Kulki są jednakowo naładowane i wisząc układają się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a=0,1 m. Jaki jest ładunek każdej kulki?

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \cdot 10^9\, N\frac{m^2}{C^2}$$

Rozwiązanie:
$q_1=q_2=q_3=6*10^{-8}$ C



Rys.2



Rys.1

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

z Rys. 2

$$\frac{\frac{1}{2}a}{x} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad => \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad\qquad F_1 = F_{12} + F_{13}$$

z Rys. 1:

$$\frac{F_m}{F_1} = tg\alpha = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x} \quad => \quad F_1 = \frac{F_m \cdot x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \quad => \quad F_1 = \frac{F_m \cdot a}{\sqrt{l^2 - x^2} \cdot \sqrt{3}}$$

Z Rys. 2

$$\frac{\frac{1}{2}F_1}{F_{12}} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad => \quad F_{12} = \frac{F_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2} \quad => \quad q = \sqrt{\frac{F_1 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot a^2}{\sqrt{3}}}$$

Zad. 2. Dwa ładunki, dodatni i ujemny, o równej wielkości q, oddalone od siebie o $2a$ tworzą układ zwany dipolem elektrycznym. Model linii sił dla tego przypadku przedstawia Rys. 3. Jakie jest natężenie E pola wytworzonego przez te ładunki w punkcie P leżącym na symetralnej odcinka łączącego obydwa ładunki w odległości r od jego środka? Założyć, że r>>a.

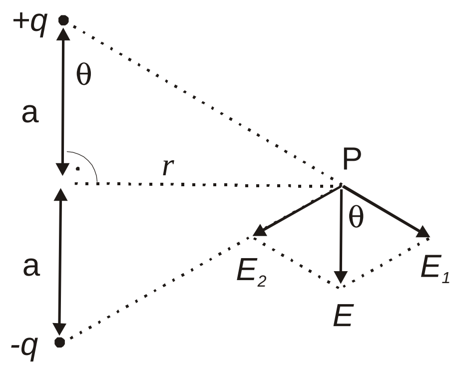
Rozwiązanie:
Zgodnie z prawem Coulomba wielkość siły działającej na q_o wynosi:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

Natężenie pola elektrycznego w punkcie, w którym znajduje się ładunek próbny, otrzymujemy z zależności:

$$E = \frac{F}{q_o} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Aby znaleźć wypadkowe natężenie pola E wytwarzanego przez kilka ładunków punktowych, należy obliczyć E_n w danym punkcie, pochodzące od danego ładunku i dodać wektorowo znalezione natężenia.



Rys. 3.

$$E = E_1 + E_2 + ... + E_n = \sum E_n \quad \text{dla } n = 1,2,3....$$

Zgodnie z tym możemy napisać:

$$E = E_1 + E_2 \qquad \text{gdzie} \qquad E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{a^2 + r^2}$$

suma wektorowa E wynosi:

$$E = 2E_1\cos\theta$$

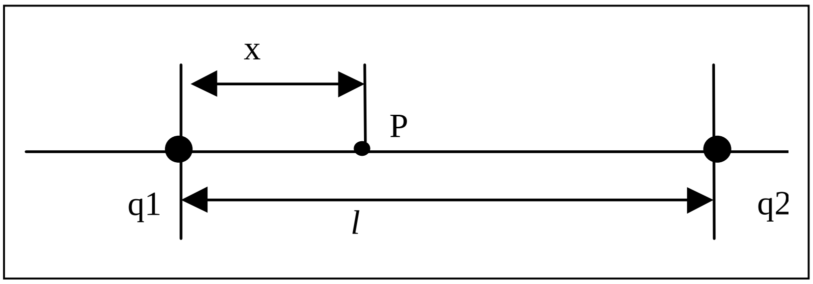
z rysunku wynika, że $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$ podstawiając E_1 i cosθ do równania na E otrzymujemy:

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(a^2 + r^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

ponieważ r>>a można zaniedbać a w mianowniku i wówczas mamy:

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^3}$$, gdzie: $p = 2aq$ - elektryczny moment dipolowy.

Zad. 3. Ładunek q_1 = +1,0 *10^{-6} C umieszczony jest w odległości l=10 cm od ładunku q_2 =+2,0*10^{-6} C. W którym punkcie linii łączącej obydwa ładunki natężenie pola elektrycznego równa się zeru?

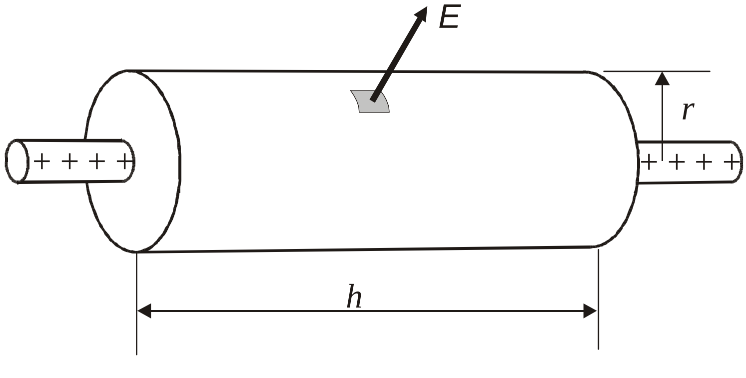


Rozwiązanie:
Punkt taki musi leżeć pomiędzy ładunkami, ponieważ tylko tu siły oddziaływania na ładunek próbny są przeciwnie skierowane.
Jeżeli przez E1 i E2 oznaczymy natężenia pól elektrycznych wytworzonych odpowiednio przez ładunki q1 i q2 to w punkcie P musi zachodzić $E_1 = E_2$ czyli:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(l - x)^2}$$

Rozwiązując ostatnie równanie względem x otrzymujemy: x=4,1 cm.

Zad. 4. Mamy odcinek nieskończenie długiego naładowanego pręta o stałej liniowej gęstości ładunku λ (ładunek na jednostkę długości mierzony w C/m).
Znaleźć natężenie pola elektrycznego E w odległości r od pręta.



Rozwiązanie:
Wektor natężenia pola elektrycznego E wytworzony przez liniowy rozkład ładunku może być skierowany jedynie radialnie względem pręta. Jako powierzchnię Gaussa wybieramy walec o promieniu r i wysokości h zamknięty z obu stron podstawami.
Korzystamy tutaj z prawa Gaussa –

$\varepsilon_0 \Phi_E = q$

które można zapisać korzystając z def. strumienia $\Phi_E = \oint \overline{E} d\overline{S}$ jako:

$\varepsilon_0 \oint \overline{E} d\overline{S} = q$

Natężenie E na powierzchni bocznej jest stałe więc i wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do powierzchni bocznej walca. Można więc zapisać:

$$\Phi_E = \oint E dS = \int E \cos 90° dS + \int E \cos 0° dS + \int E \cos -90° dS = 0 + E \int dS + 0 = E \cdot 2\pi \cdot r \cdot h$$

Ładunek zamknięty wewnątrz powierzchni Gaussa wynosi $\lambda \cdot h$ czyli można zapisać korzystając z prawa Gaussa $\varepsilon_0 \oint \overline{E} d\overline{S} = \lambda \cdot h$ czyli $\varepsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r h = \lambda \cdot h$ => $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Potencjał

Pole elektryczne wokół naładowanego pręta można opisać nie tylko za pomocą wektora natężenia pola E ale także za pomocą wielkości skalarnej zwanej potencjałem elektrycznym V. Wielkości te są ze sobą ściśle powiązane.

Potencjał elektryczny danego punktu pola definiujemy jako pracę jaką muszą wykonać siły pola, aby ładunek jednego kulomba przenieść z danego punktu do punktu nieskończenie odległego (lub pracę jaką muszą wykonać siły zewnętrzne przy przeniesieniu ładunku 1 C z nieskończoności do danego punktu).

$$V_A = \frac{W_{A\infty}}{Q_0} = \frac{W_{\infty A}^{(z)}}{Q_0} = \frac{E_{pA}}{Q_0} - \frac{E_{p\infty}}{Q_0}$$

zakładamy iż energia potencjalna ładunku w punkcie nieskończenie odległym równa się zeru i wtedy otrzymujemy:

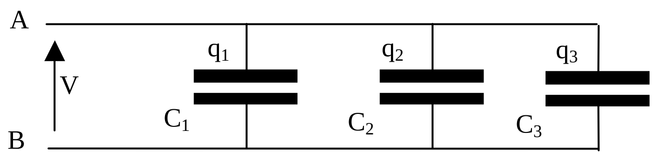
$V_A = \dfrac{E_{pA}}{Q_0}$ jednostką potencjału jest 1 V

Praca wykonana na ładunku swobodnym $+Q_0$ przez siły pola przy przesunięciu tego ładunku z A do B (droga o skończonej długości s) wynosi:

$W_{AB} = \int_A^B \overline{F} d\overline{s}$ ale $F = q_0 E$ więc $W_{AB} = \int_A^B q_0 \overline{E} d\overline{s} = q_0 \int_A^B \overline{E} d\overline{s}$

Wykonanie powyższej pracy nie jest związane z działaniem sił zewnętrznych – praca jest wykonana kosztem zmniejszenia się en. potencjalnej zmagazynowanej w polu elektrycznym.

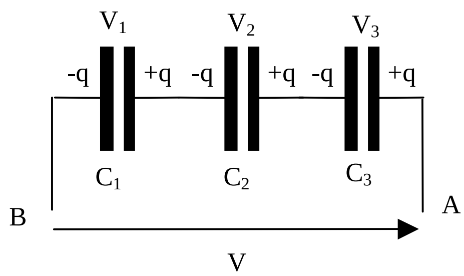
Zad. 5. Wyprowadź wzór na pojemność zastępczą 3 kondensatorów połączonych równolegle.



$C_1 = \dfrac{q_1}{V} \Rightarrow V = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2} = \dfrac{q_3}{C_3}$ całkowity ładunek układu równy $q = q_1 + q_2 + q_3$

czyli $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \dfrac{C_1 V + C_2 V + C_3 V}{V} = C_1 + C_2 + C_3$

Zad. 6. Wyprowadź wzór na pojemność zastępczą 3 kondensatorów połączonych szeregowo.



$V_1 = \dfrac{q}{C_1}$ $V_2 = \dfrac{q}{C_2}$ $V_3 = \dfrac{q}{C_3}$ $V = V_1 + V_2 + V_3$

czyli $V = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = q \cdot (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}) \quad \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{C}} = \frac{V}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

Zad. 7. Różnicę potencjałów 300 V przyłożono do połączonych szeregowo kondensatorów $C_1 = 2\mu F$ i $C_2 = 8\mu F$. Jaki jest ładunek i różnica potencjałów na każdym z kondensatorów.

$C_1 = \frac{q_1}{V_1} \qquad q_1 = q_2 = C_1 V_1 = C_2 V_2$

$V = V_1 + V_2$

$V_2 = V - V_1$

$C_1 V_1 = C_2 (V - V_1) = C_2 V - C_2 V_1$

$C_1 V_1 + C_2 V_1 = C_2 V$

$V_1 (C_1 + C_2) = C_2 V$

$V_1 = \frac{C_2 \cdot V}{(C_1 + C_2)} = 240V$

$q_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-6} [C]$

$V_2 = 300[V] - 240[V] = 60[V]$

Zad. 8. Do drutu miedzianego i żelaznego o tej samej długości przyłożono tą samą różnicę potencjałów.
1) Jaki musi być stosunek ich promieni, aby natężenie prądu było to samo?
2) Czy przez odpowiedni dobór promieni można zrównać gęstości prądów?

Rozwiązanie 1:

$R_{Cu} = \rho_{Cu} \frac{l}{A}$

$\rho_{Cu} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} [\Omega m]$

$\rho_{Fe} = 1{,}0 \cdot 10^{-7} [\Omega m]$

$i = \frac{U}{R_{Cu}} = \frac{U}{R_{Fe}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{R}_{\mathrm{Cu}} = R_{Fe}$

$\rho_{Cu} \frac{l}{A_{Cu}} = \rho_{Fe} \frac{l}{A_{Fe}} \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{Cu} \cdot A_{Fe} = \rho_{Fe} \cdot A_{Cu} \quad \Rightarrow \frac{A_{Cu}}{A_{Fe}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Fe}} \qquad A = \pi \cdot r^2$

$\frac{r_{Cu}^{\ 2}}{r_{Fe}^{\ 2}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Fe}} \qquad \frac{r_{Cu}}{r_{Fe}} = \sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Fe}}} = \sqrt{0{,}17} = 0{,}41$

Rozwiązanie 2:

Gęstość prądu

$j_{Cu} = \frac{i}{A_{Cu}} = \frac{i}{\pi \cdot r_{Cu}^{\ 2}} \qquad j_{Fe} = \frac{i}{A_{Fe}} = \frac{i}{\pi \cdot r_{Fe}^{\ 2}} \qquad$ pytanie czy $j_{Fe} = j_{Cu}$?

Oczywiście nie, ponieważ

$\frac{i}{\pi \cdot r_{Cu}^{\ 2}} \neq \frac{i}{\pi \cdot r_{Fe}^{\ 2}}$

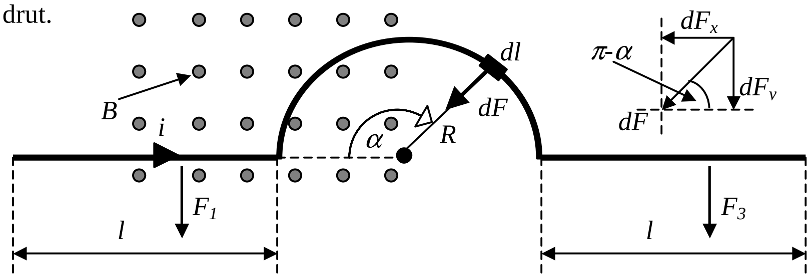
Zad. 9. Grzejnik o mocy P=500 W ma pracować w sieci o napięciu U_1=115V. O ile procent zmniejszy się ilość wydzielanego ciepła, jeżeli napięcie w sieci spadnie do U_2=110V. Należy założyć, że rezystancja grzejnika jest stała.

Rozwiązanie:

$P_1 = \frac{U_1^2}{R}, P_2 = \frac{U_2^2}{R} \qquad \Rightarrow \quad R = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{U_2^2}{P_2} \qquad P_2 = P_1 \cdot \frac{U_2^2}{U_1^2} = 457{,}46[W]$

czyli z proporcji moc zmniejszyła się o ok. 8.5 %

Zad. 10. Drut o kształcie jak na rysunku, przewodzący prąd o natężeniu i umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji magnetycznej B, skierowanym prostopadle do powierzchni zawierającej przewodnik. Obliczyć siłę działającą na drut.



Rozwiązanie:
Z reguły lewej dłoni należy wyznaczyć kierunki sił działających na poszczególne odcinki przewodnika.
Przy obliczeniu sił należy wykorzystać zależność na siłę elektrodynamiczną:

$$F = Bil \tag{1}$$

gdzie:
F – siła działająca na przewodnik,
B – indukcja pola magnetycznego,
i – prąd płynący przez przewodnik,
l – długość przewodnika umieszczona w polu magnetycznym,

Siły F_1 i F_3 działające na prostoliniowe odcinki o długości l są takie same i wynoszą:

$$F_1 = F_3 = Bil \tag{2}$$

Fragment półkolisty podzielmy na małe fragmenty o długości dl, dla których można przyjąć, że siła dF na niego działająca jest stała, skierowana wzdłuż promienia R i wynosi:

$$dF = Bidl$$

Siłę dF można rozłożyć na dwie składowe: poziomą dF_x oraz pionową dF_y. Składowe poziome znoszą się, gdyż dla dwóch ćwiartek są skierowane przeciwnie. Zatem interesuje nas siła w kierunku osi y:

$$dF_y = dF\sin(\pi - \alpha) = dF\sin\alpha$$

$$dF_y = Bi\sin\alpha \cdot dl$$

Z miary łukowej kąta mamy:

$$dl = Rd\alpha$$

Stąd:

$$dF_y = BiR\sin\alpha \cdot d\alpha \tag{3}$$

Całkując obustronnie równanie (3) w granicach od 0 do π otrzymamy:

$$F_y = \int_0^\pi BiR\sin\alpha d\alpha = BiR\int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = -BiR\cos\alpha\Big|_0^\pi = 2BiR$$

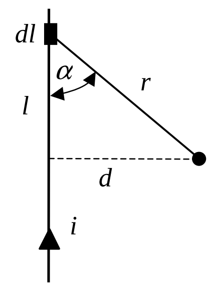
Ostatecznie siła działająca na przewodnik wynosi:

$$F = F_1 + F_3 + F_y = 2Bil + 2BiR$$

$$F = 2Bi(l + R)$$

Zad. 11. Przez długi prostoliniowy przewodnik płynie prąd o natężeniu i. Wyznaczyć indukcję magnetyczną B w punkcie oddalonym o d od tego przewodnika.

Rozwiązanie 1:



Przy obliczeniu sił można skorzystać z prawa Biota-Savarta:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{idl\sin\alpha}{r^2} \tag{1}$$

gdzie:
dB – indukcja pola magnetycznego wytwarzanego przez fragment przewodnika o długości dl,
i – prąd płynący przez przewodnik,
r – odległość fragmentu dl przewodnika od punktu, w którym obliczamy indukcję magnetyczną,

Korzystając z zależności geometrycznych otrzymujemy:

$$r = \sqrt{l^2 + d^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}$$

Uwzględniając dwie powyższe zależności w (1) mamy:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 i}{4\pi}\frac{d}{\left(l^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}dl \tag{2}$$

Całkujemy równanie (2) w granicach od -∞ do +∞:

$$B = \frac{\mu\mu_0 i}{4\pi d}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2}{\left(l^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}dl \tag{3}$$

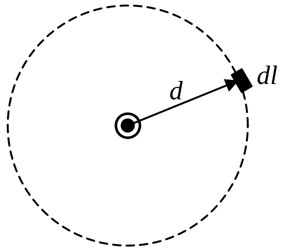
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2}{\left(l^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}dl = \frac{l}{\left(l^2 + d^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2 \tag{4}$$

Uwzględniając wartość całki (4) w równaniu (3) ostatecznie otrzymamy:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d}$$

Rozwiązanie 2:

Skorzystajmy z prawa Ampere'a:



$$\oint B dl = \mu\mu_0 i$$

B=const zatem:

$$B\oint dl = \mu\mu_0 i$$

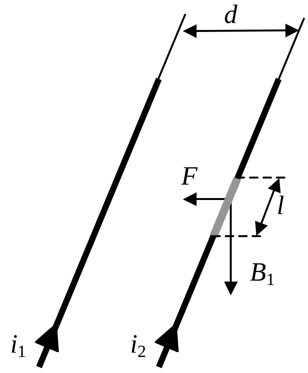
Całka kołowa wokół przewodnika z prądem wynosi (patrz rysunek obok):

$$B 2\pi d = \mu\mu_0 i$$

Stąd ostatecznie:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d}$$

Zad. 12. Dwa długie prostoliniowe przewodniki umieszczono równolegle w odległości *d*. Przez te przewodniki płyną prądy o natężeniach: i_1 i i_2. Korzystając z wyników poprzedniego zadania wyznaczyć siłę wzajemnego oddziaływania tych przewodników.



Rozwiązanie 2:

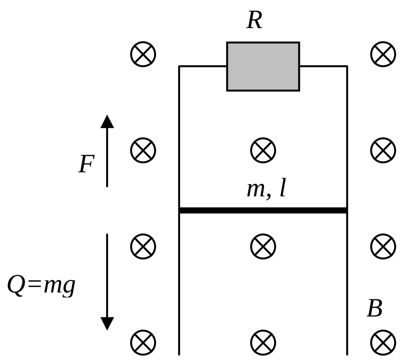
Przewodnik *1* wytwarza wokół siebie pole magnetyczne o indukcji B_1, która w odległości *d* wynosi (patrz Zad. 11):

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{d}$$

Przewodnik *2*, w którym płynie prąd i_2 umieszczony jest w polu magnetycznym B_1 wytworzonym przez przewodnik *1*. Zatem na długość *l* tego przewodnika będzie działała siła *F* o wartości:

$$F = B_1 i_2 l = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2 l}{d}$$

Zad. 13. Znaleźć ruch przewodnika spadającego w polu grawitacyjnym wzdłuż pary przewodów zwartych oporem *R*. Masa poprzeczki *m*, długość poprzeczki *l*, opór poprzeczki i przewodów jest zaniedbywalny w porównaniu z oporem *R* (rys. 2). Prostopadle do płaszczyzny przewodów działa stałe pole magnetyczne o indukcji *B*. Prędkość początkowa poprzeczki v_0=0.



Rozwiązanie:

Ruch ramki odbywa się w stałym polu magnetycznym. Zmienia się jednak strumień indukcji pola *B* przenikający przez zmienną powierzchnię rozpiętą na prostokącie z przewodów i poprzeczki. Jak wynika z prawa Faradaya, generuje to siłę elektromotoryczną w obwodzie, co w konsekwencji powoduje pojawienie się prądu.

Prawo indukcji Faradaya: siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie jest wprost proporcjonalna do szybkości zmian strumienia magnetycznego w czasie:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (1)$$

Strumień pola magnetycznego wynosi:

$$\Phi = \int B dS$$

Ponieważ *B=const* otrzymujemy:

$$\Phi = B\int dS = Blx \qquad (2)$$

gdzie: *x* – droga pokonywana przez poprzeczkę.

Wstawiając (2) do (1) mamy:

$$\varepsilon(t) = -Bl\frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

Siła elektromotoryczna (3) powoduje przepływ prądu przez ramkę o natężeniu:

$$i(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R} = -\frac{Bl}{R}\frac{dx}{dt}$$

Na poprzeczkę działa zatem siła elektrodynamiczna o wartości:

$$F = Bli = \frac{B^2 l^2}{R} \frac{dx}{dt} \tag{4}$$

Równanie drugiej zasady dynamiki dla ramki poruszającej się w polu elektromagnetycznym:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - F \tag{5}$$

Uwzględniając siłę (4) w równaniu (5) otrzymujemy:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \frac{B^2 l^2}{R} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{B^2 l^2}{mR} \frac{dx}{dt} = g \tag{6}$$

Przyjmując jako interesującą nas wielkość – prędkość poprzeczki uzyskujemy:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} v = g \tag{7}$$

Rozwiązując równanie (7) otrzymujemy następującą zależność na prędkość poprzeczki:

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left[1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right]$$