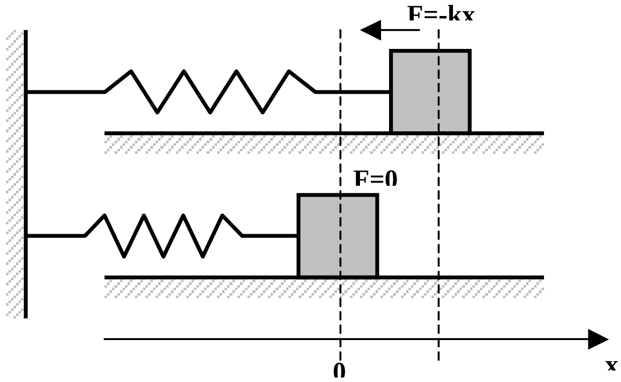
**Zadania z fizyki rok 2005/2006. Sucha Beskidzka, Część II**

**Zad. 1.** Ciało o masie *m* przyczepiono do idealnej sprężyny o współczynniku sprężystości *k*. Ciało to może się swobodnie poruszać się po doskonale gładkiej poziomej powierzchni. Jak zmienia się położenie, prędkość i całkowita energia ciała jeżeli przesunięto go od położenia równowagi.
*Rozwiązanie*:
Napiszmy równanie dynamiki dla masy *m*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$




Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest funkcja postaci:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi),\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Po podstawieniu powyższych zależności do (1) otrzymujemy:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0\ .\ \text{Stąd:}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

gdzie: ω - częstotliwość kołowa, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ - okres ruchu, $\nu = \frac{1}{T}$ - częstotliwość oscylatora, $\varphi$ - faza początkowa ruchu.
Energia kinetyczna wynosi:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)\ .$$

Energia potencjalna równa jest pracy jaką wykona siła *F=kx* przesuwając masę *m* z punktu *0* do *x*:

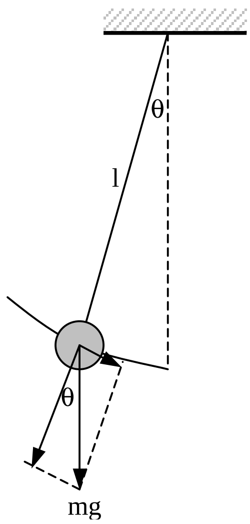
$$E_P = \int_0^x Fds = \int_0^x ksds = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

Całkowita energia masy wynosi:

$$E = E_K + E_P = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$

**Zad. 2.** Wyprowadź wzór na okres drgań wahadła prostego (matematycznego) o długości *l* i masie *m*.
*Rozwiązanie*:
Siła działająca na masę *m* przywracająca ją do położenia równowagi wyraża się wzorem:

$$F = -mg\sin\theta$$




**Rozkład w szereg McLarena**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots$$

dla funkcji *sin(x)* otrzymujemy

$$\sin(x) = \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Dla pierwszych sześciu wyrazów otrzymujemy

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Dla małych kątów przyjmuje się $\sin\theta \approx \theta$. Przemieszczenie wzdłuż łuku wynosi:
$x = l\theta$. Podsumowując powyższe rozważania uzyskujemy:

$$F = -mg\frac{x}{l} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{l} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

Korzystając z wyników uzyskanych w Zad. 1 otrzymujemy:

$k \to \frac{mg}{l} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}$. Ostatecznie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dla wahadła fizycznego równanie dynamiki ($d$ – odległość środka masy od osi obrotu):

$\sin\theta \approx \theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I}\theta = 0$. Stąd: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$

**Zad. 3.** Sformułować prawo powszechnego ciążenia. Znaleźć zależność na natężenie pola grawitacyjnego $\gamma$, energię potencjalną $E_P$ oraz wartości pierwszej drugiej prędkości kosmicznej dla planety o masie $M$ i promieniu $R$. Oszacować ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne przy powierzchni Ziemi. Ile wynosi pierwsza i druga prędkość kosmiczna dla Ziemi?

*Rozwiązanie*:

Siła grawitacji: $\vec{F}_G = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$

Natężenie pola grawitacyjnego: $\gamma = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r}$. Jeżeli $r=R$ to: $\gamma = G\frac{M}{R^2}$. Dla Ziemi natężenie pola grawitacyjnego przy powierzchni równe jest przyspieszeniu ziemskiemu $g \approx 9.81$ m/s$^2$.

Energia potencjalna równa jest pracy jaką należy wykonać przy przeniesieniu ciała o masie $m$ w polu grawitacyjnym z odległości $r$ do nieskończoności. Korzystając ze wzoru na pracę otrzymujemy:

$$E_P = \int_r^\infty F_G dx = \int_r^\infty G\frac{mM}{x^2}dx = GmM\int_r^\infty \frac{1}{x^2}dx = G\frac{mM}{r}.$$

Potencjał: $V = \frac{E_P}{m} = G\frac{M}{r}$.

Pierwsza prędkość kosmiczna określana jest jako ta, którą należy nadać ciału o masie m, aby krążyło po orbicie Ziemii. Oznacza to, że siła odśrodkowa musi równoważyć siłę grawitacji.

$\frac{mv_I^2}{R_Z} = G\frac{mM_Z}{R_Z^2} \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} \approx 7.9\,km/s$. $G$=6.67 10$^{-11}$, $M_Z$=6 10$^{24}$ kg, $R_Z$=6.37 10$^6$ m.

Druga prędkość kosmiczna określa prędkość ucieczki ciała z Ziemi. Czyli ciału o masie $m$ należy nadać taką prędkość początkową, aby energia kinetyczna była równa energii potencjalnej potrzebnej do przeniesienia ciała do nieskończoności.

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = -G\frac{mM_Z}{R_Z} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} \approx 11.2\,km/s.$$

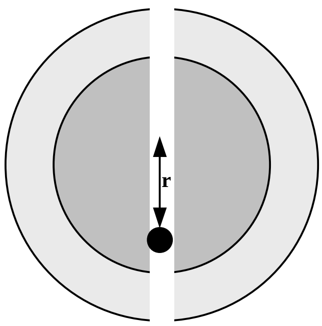
**Zad. 4.** Przez Ziemię przekopano tunel wzdłuż jej średnicy. Opisać ruch ciała upuszczonego do tunelu. Pominąć wszystkie siły tarcia i założyć, że Ziemia ma jednorodną gęstość.

*Rozwiązanie*:

Przyciąganie grawitacyjne Ziemi działające na punkt materialny znajdujący się w odległości $r$ od środka Ziemi jest w całości wywołane przez tę część materii Ziemi, która zawarta jest w powłokach wewnętrznych w stosunku do położenia punktu. Zewnętrzne powłoki nie działają żadną siłą.

Masa kuli o promieniu r wynosi:

$M = \varsigma V = \frac{4}{3}\pi r^3\varsigma$. Dla celów oddziaływania grawitacyjnego można założyć, że masa ta jest skupiona w środku Ziemi. Stąd siła:




$F = -\frac{GMm}{r^2}$, gdzie minus oznacza kierunek działania siły.

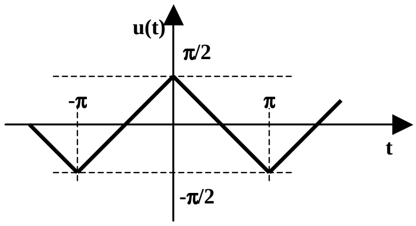
$$F = -\frac{4}{3}\pi\varsigma Gmr = -kr,\ k = \frac{4}{3}\pi\varsigma Gm.$$

Na podstawie ostatniego stwierdzamy, że jest to ruch harmoniczny prosty. Okres tego ruchu wynosi (patrz Zad. 1.):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi\varsigma G m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\varsigma G}} \approx 5050\,s = 84.2\,\text{min} .$$

**Zad. 5.** Drgania masy na sprężynie z tłumikiem wyrażone jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.02\frac{dx(t)}{dt} + 25x(t) = u(t) \qquad (*)$$




Wymuszenie *u(t)* jest postaci:

$$u(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2}, & -\pi \le t \le 0 \\ -t + \frac{\pi}{2}, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Znaleźć rozwiązanie ustalone *x(t)* powyższego równania.

*Rozwiązanie*:

**Szereg Fouriera - teoria**

Jeżeli *f(x)* jest funkcją okresową o okresie $2\pi$ to można ją przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \text{ gdzie:} \qquad (1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,2,\ldots . \qquad (2)$$

Jeżeli funkcja *f(t)* ma okres *T* to wprowadzając nową zmienną $x = \frac{2\pi}{T}t$ otrzymujemy funkcję:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t\right) \qquad (3)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,\ a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi n}{T}tdt,\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}tdt,\ n = 1,2,\ldots . \qquad (4)$$

Jeżeli funkcja *f(t)* o okresie *T* jest parzysta to można ją przedstawić jako:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t . \qquad (5)$$

Jeżeli funkcja *f(t)* o okresie *T* jest nieparzysta to można ją przedstawić jako:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{2\pi n}{T}t . \qquad (6)$$

Funkcję *u(t)* należy przedstawić w postaci szeregu Fouriera.

Ponieważ rozważana funkcja jest parzysta ( *u(t)=u(-t)* ) funkcja *u(t)* przyjmie postać:

$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t$, gdzie $a_0$, $a_n$ wyznacza się z (4). Ponieważ $T=2\pi$ ostatecznie otrzymamy:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt,\ a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ n = 1,2,\ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}(1 - \cos n\pi)$$

Jeżeli *n* liczbą nieparzystą to: $a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}$. Jeżeli *n* parzyste to $a_n = 0$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$u(t)=\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{3^2}\cos 3t+\frac{1}{5^2}\cos 5t+\dots\right).$$

Równanie (*) można zatem napisać dla każdego ze składników powyższego szeregu:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+0.02\frac{dx(t)}{dt}+25x(t)=\frac{4}{\pi n^2}\cos nt\ ,\ n=1,3,5,\dots\ . \qquad (7)$$

Zgadujemy postać rozwiązania powyższego równania różniczkowego jako:

$$x_n=A_n\cos nt+B_n\sin nt \qquad (8)$$

Obliczamy I i II pochodną z równania (8):

$$\frac{dx_n}{dt}=-nA_n\sin nt+nB_n\cos nt,\quad \frac{d^2x_n}{dt^2}=-n^2A_n\cos nt-n^2B_n\sin nt\ . \qquad (9)$$

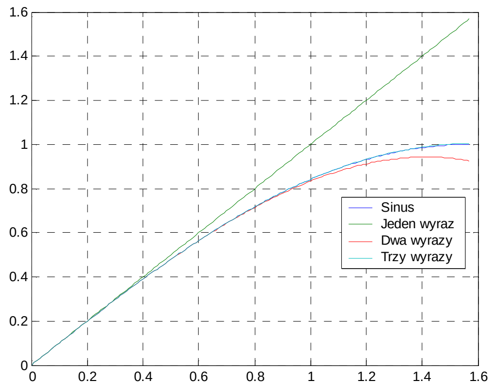
Wstawiając (8) i (9) do (7) otrzymujemy:

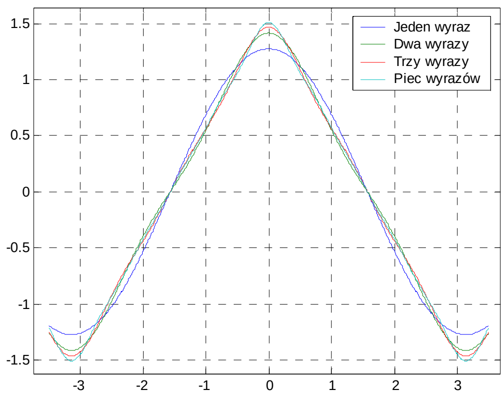
$$(25-n^2)B_n-0.02nA_n=0$$

$$0.02nB_n+(25-n^2)A_n=\frac{4}{\pi n^2}$$

Stąd:

$$A_n=\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D},\quad B_n=\frac{0.08n}{n^2\pi D},\quad D=(25-n^2)^2+(0.02n)^2\ .$$




**Zad. 6.** Napisz równanie kinetyczne fali o stałym okresie. Na czym polega interferencja fal ? Co nazywamy falą stojącą ?

*Rozwiązanie*:

Załóżmy, że dla $t=0$ fala jest opisana równaniem:

$$y=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \qquad (1)$$

gdzie: $A$ – amplituda drgań, $y$ – wartość wychylenia poprzecznego, $\lambda$ - długość fali.

Wartość wychylenia y jest taka sama dla przemieszczeń: $x$, $x+\lambda$, $x+2\lambda$, itd.

Jeżeli uwzględnimy przemieszczenie fali w czasie np. w prawo z prędkością v to równanie (1) przyjmie postać:

$$y=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)$$

Okresem $T$ nazywamy czas, w którym fala przebiega odległość równą jej długości fali $\lambda$., czyli:

$\lambda=vT$ , stąd $y=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)$. Z tego ostatniego można wywnioskować jak zachowuje się fala dla ustalonego $t$ i różnego $x$, oraz ustalonego $x$ i różnego $t$.

W ruchu falowym wprowadza się dodatkowe wielkości:

- Liczbę falową $k$: $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ .
- Częstość kołową $\omega$: $\omega=\frac{2\pi}{T}$ .

Równanie fali może mieć przyjąć zatem następującą postać:

$y = A\sin(kx - \omega t)$.

**Interferencją** fal nazywamy nakładanie się dwóch lub więcej ciągów falowych

Rozważmy dwie fale o równych częstościach i amplitudach, biegnące z tą samą prędkością w tym samym kierunku, lecz o fazach różniących się o $\varphi$.

$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$

$y_2 = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$

Znajdźmy falę wypadkową (korzystając z zasady superpozycji):

$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \varphi) = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)]$. Ponieważ

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ otrzymujemy:

$$y = A\left[2\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right] = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Jeżeli $\varphi=0$ to fale się wzmacniają, jeżeli natomiast $\varphi=180$ to fale się wygaszają.

**Fala stojąca** to fala mogąca powstać w ośrodkach sprężystych o skończonych wymiarach np. napięty sznur pomiędzy dwoma mocowaniami, metalowy pręt zamocowany sztywno z jednej strony itp. W wyniku pobudzenia takiego ośrodka fala wzdłuż niego biegnąca odbija się od granicy. Po każdym takim odbiciu fala porusza się w kierunku przeciwnym. Zgodnie z zasadą superpozycji fale te się dodają.

$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$

$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$

$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t) = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)]$

$y = 2A\sin kx\cos\omega t$

Amplituda przybiera wartości maksymalne $2A$ w punktach dla których $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$. Ponieważ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ zatem $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots$. Punkty te nazywane są **strzałkami**. Amplituda przyjmuje minimalne wartości równe zeru w punktach dla których $kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Zatem $x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}, \ldots$. Punkty te nazywane są **węzłami**.

**Zad. 7.** Jak zmienia się częstotliwość fali akustycznej jeżeli:

- Źródło nie porusza się a obserwator zbliża się (oddala) do (od) źródła ze stałą prędkością $v_0$.
- Obserwator pozostaje w spoczynku a źródło zbliża się (oddala) do (od) obserwatora ze stałą prędkością $v_z$.

Źródło i obserwator poruszają się wzdłuż łączącej ich linii prostej.

*Rozwiązanie*:

**Przypadek I**. Jeżeli obserwator pozostawałby w spoczynku to rejestruje $\frac{vt}{\lambda}$ fal w przedziale czasu $t$ ($v$: prędkość dźwięku w powietrzu, $\lambda$: długość fali). Jeżeli porusza się w kierunku źródła to odbiera on $\frac{v_0 t}{\lambda}$ dodatkowych fal w tym samym czasie $t$. Częstotliwość słyszana przez obserwatora jest równa liczbie fal odbieranych w jednostce czasu, zatem:

$f' = \dfrac{\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_0 t}{\lambda}}{t} = \dfrac{v + v_0}{\lambda} = f\dfrac{v + v_0}{v}$. Ostatecznie $f' == \left(1 + \frac{v_0}{v}\right)f$. Jeżeli obserwator oddala się od źródła to:

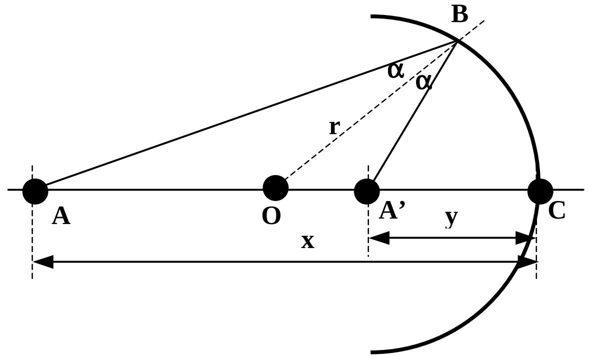
$f' == \left(1 - \frac{v_0}{v}\right)f$.

**Przypadek II**. W przypadku ruchu źródła w kierunku obserwatora mamy do czynienia z efektem skrócenia długości fali. Jeżeli częstotliwość fali wynosi $f$ a prędkość źródła $v_z$, to w czasie jednego okresu drgań przesuwa się ono o odległość $\frac{v_z}{f}$ i każda długość fali zostaje skrócona o tę właśnie wielkość. Stąd długość fali docierająca do obserwatora wyniesie:

$\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_z}{f} = \frac{v - v_z}{f}$. Zatem:

$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_z} f$ . Jeżeli źródło oddala się od obserwatora to: $f' = \frac{v}{v + v_z} f$

**Zad. 8**. Wyprowadź wzór na równanie zwierciadła wklęsłego.
*Rozwiązanie*:




Z twierdzenia o dwusiecznej trójkąta *ABA'* wynika:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB}{BA'} \qquad (1)$$

Z powyższego rysunku wynika, że:

$$AO = x - r,\ OA' = r - y \qquad (2)$$

Zakładając, że promienie są przyosiowe tzn. kąt $\beta$ jest dostatecznie mały otrzymujemy:

$$AB \approx AC = x,\ BA' \approx A'C = y \qquad (3)$$

Wstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy:

$$\frac{x-r}{r-y} = \frac{x}{y} \Rightarrow xy - ry = rx - xy$$

$$ry + rx = 2xy \quad / : xyr$$

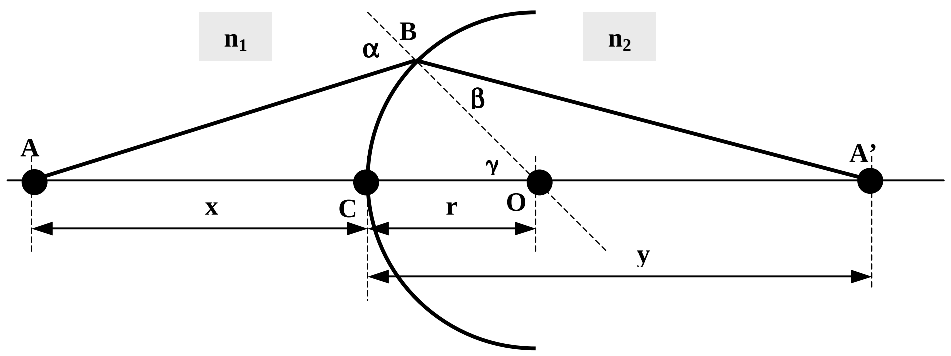
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{r}$$

Z ostatniego wynika, że dla $x \to \infty$ (promienie biegną równolegle do głównej osi optycznej) promienie po odbiciu od zwierciadła przecinają się w jednym punkcie:

$\frac{1}{y} = \frac{2}{r} \Rightarrow y = \frac{r}{2}$. Przyjmując $\frac{1}{f} = \frac{2}{r}$ otrzymujemy ostatecznie:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$ , gdzie $f$ nazywamy ogniskiem zwierciadła.

**Zad. 8**. Wyprowadź wzór na równanie soczewki cienkiej.
*Rozwiązanie*:




Rozważmy trójkąt ABO.

$$\frac{\sin\angle(ABO)}{AO}=\frac{\sin\gamma}{AB},\quad \angle(ABO)=\pi-\alpha$$

Dla promieni przyosiowych (prawie równoległych do osi optycznej soczewki) $AB \approx AC$. ZatemP:

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\gamma}=\frac{x+r}{x} \qquad (1)$$

Analogicznie rozważając trójkąt BOA’ otrzymujemy:

$$\frac{\sin(\pi-\gamma)}{\sin\beta}=\frac{y}{y-r} \qquad (2)$$

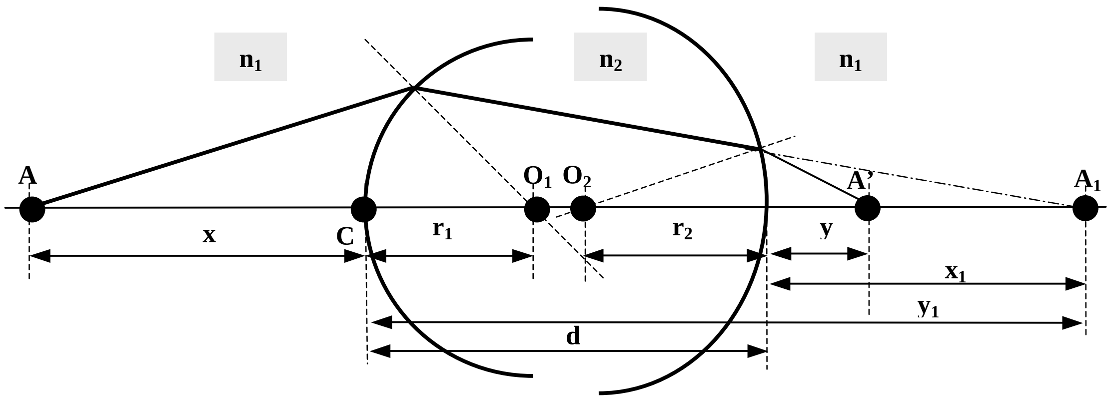
Mnożąc równania (1) i (2) stronami otrzymamy:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{x+r}{x}\frac{y}{y-r}$. Ponieważ $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}=n_{12}$ zatem

$\frac{n_2}{n_1}=\frac{xy+ry}{xy-xr}$. Z tego ostatniego ostatecznie mamy:

$$\frac{n_2}{y}+\frac{n_1}{x}=\frac{n_2-n_1}{r} \qquad (3)$$

Korzystając z tego ostatniego wyprowadźmy wzór soczewkowy.




Napiszmy równanie (3) dla powierzchni kulistej $r_1$ dla której obraz znajduje się w $A_1$.

$$\frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{y_1}=\frac{n_2-n_1}{r_1} \qquad (4)$$

Napiszmy równanie (3) dla powierzchni kulistej $r_2$ dla której obraz znajduje się w $A$.

$$-\frac{n_2}{x_1}+\frac{n_1}{y}=\frac{n_1-n_2}{r_2} \qquad (5)$$

Dodajemy równania (4) i (5) stronami

$n_2\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{x_1}\right)+n_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. Ponieważ $\frac{1}{y_1}-\frac{1}{x_1}=-\frac{d}{x_1y_1}$ otrzymujemy

$-\frac{n_2 d}{x_1y_1}+n_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. Jeżeli soczewka będzie bardzo cienka to $d \approx 0$. Zatem

$n_1\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{y}\right)=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$ lub

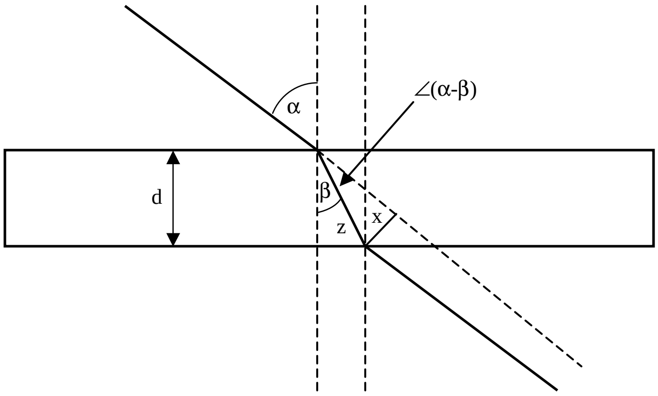
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$. Przyjmując $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f}$ ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

**Zad. 9**. O ile przesunie się promień światła po przejściu przez szklaną szybę o grubości *d*, jeżeli kąt padania wynosi $\alpha$.

*Rozwiązanie*:

Oznaczmy przesunięcie promieni jako *x*.




$$\frac{d}{z} = \cos\beta \;\Rightarrow\; z = \frac{d}{\cos\beta} \qquad (1)$$

$$\frac{x}{z} = \sin(\alpha-\beta) \;\Rightarrow\; x = z\sin(\alpha-\beta) \qquad (2)$$

Wstawiając (1) do (2) otrzymujemy:

$$x = d\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\,.$$

Korzystając z prawa załamania światła na granicy dwóch ośrodków

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} \;\Rightarrow\; \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{12}}$$

oraz zależności trygonometrycznych:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,\; \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

ostatecznie otrzymamy:

$$x = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n_{12}^2 - \sin^2\alpha}}\right).$$