

## Zadania z fizyki rok 2005/2006. Sucha Beskidzka, Część I

**Zad. 1.** Punkt materialny porusza się w ten sposób, że jego położenie jest następującą funkcją czasu:

$$\vec{r}(t) = x + 4t^2 \hat{y} + t\hat{z}$$

Wyrazić prędkość i przyspieszenie tego punktu materialnego jako funkcje czasu. Jaki jest kształt drogi tego punktu materialnego?

*Rozwiązanie:*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 8t\hat{y} + \hat{z}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 8\hat{y}. \quad \text{Wyznaczenie toru ruchu:}$$

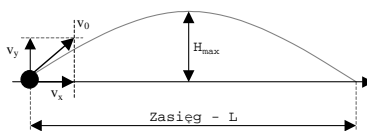
$$x(t) = 1, \quad y(t) = 4t^2, \quad z(t) = t. \quad \text{Stąd: } x = 1, \quad y(z) = 4z^2$$

**Zad. 2.** Ciało wyrzucono pod kątem  $\alpha$  do poziomu z prędkością początkową  $v_0$ . Zaniedbując opór powietrza i przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$ , znaleźć:

- kształt toru ruchu ciała,
- zasięg i maksymalną wysokość na jaką wzniesie się ciało.

*Rozwiązanie:*

Rzut ukośny jest złożeniem dwóch ruchów: jednostajnego w kierunku poziomym i jednostajnie przyspieszonego (opóźnionego) pod działaniem sił grawitacji.



$$v_x = v_0 \cos(\alpha), \quad v_y = v_0 \sin(\alpha)$$

$$L = v_{x \max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad H_{\max} = v_{y \max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad \text{Wzory te można wyznaczyć korzystając z równań ruchu lub}$$

zasady zachowania energii. Równanie toru ruchu wyznaczamy z poniższych równań przez eliminację  $t$ .

$$y = v_y t - \frac{gt^2}{2}, \quad x = v_x t. \quad \text{Stąd ostatecznie: } y(x) = \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x$$

**Zad. 3.** Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością  $v_1$ , prostopadłą do kierunku prądu. Woda w rzece płynie wszędzie równoległe do brzegów, ale wartość jej prędkości zależy od odległości od brzegów i dana jest wzorem:

$$v_2 = v_0 \sin \frac{\pi \cdot y}{L}$$

gdzie  $v_0, L$  - stałe ( $L$  jest szerokością rzeki). Znaleźć:

- wartość wektora prędkości łódki względem nieruchomych brzegów,
- kształt toru łódki.

*Rozwiązanie:*

$$y = v_1 t, \quad v_2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int_0^t v_2 d\tau = \int_0^t v_0 \sin \frac{\pi \cdot y}{L} d\tau \quad (1)$$

$$x = \int_0^t v_0 \sin \frac{\pi \cdot v_1 \tau}{L} d\tau = \frac{v_0 L}{v_1 \pi} \left( -\cos \frac{\pi \cdot v_1 \tau}{L} \right) \Big|_0^t. \quad \text{Ostatecznie:}$$

$$x(t) = \frac{v_0 L}{v_1 \pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi \cdot v_1 t}{L} \right) \quad (2)$$

Równanie toru wyznaczamy z (1) i (2):

$$x(y) = \frac{v_0 L}{v_1 \pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi \cdot y}{L} \right). \quad \text{Prędkość łódki wyznaczamy ze wzoru:}$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}.$$

**Zad. 4.** Na gładkim stole leży sznur,  $1/4$  długości sznura zwisa pionowo w dół. Znaleźć czas, po którym cały sznur spadnie ze stołu na podłogę, jeżeli w chwili  $t = 0$  jego prędkość wynosi zero, a całkowita długość sznura wynosi  $l$ .

*Rozwiązanie:*

Oznaczenia:  $M$  – całkowita masa sznura,  $m$  – masa sznura zwisająca nad podłogą,  $\zeta_L$  – gęstość liniowa sznura.

II zasada dynamiki:

$$M \frac{dv}{dt} = mg \quad (1)$$

$$m = \zeta_L \cdot x, \quad M = \zeta_L \cdot l \quad (2)$$

z (1) i (2) otrzymujemy:

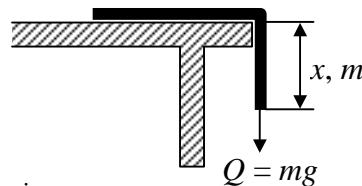
$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{g}{l} x = 0. \text{ Przewidujemy rozwiązanie } x(t) = Ce^{rt} \text{ i otrzymamy ostatecznie:}$$

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}, \quad v(t) = C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Uwzględniając warunki początkowe na  $x(0)$  i  $v(0)$  otrzymujemy:

$$x(t) = \frac{l}{8} \left( e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right). \text{ Czas spadku obliczony z ostatniego równania:}$$

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$$



**Zad. 5.** Kula o masie  $m$  uderza w nieruchomą kulę o masie  $M$  i pozostaje w niej. Jaka część energii kinetycznej kuli zamieni się w energię wewnętrzną (zakładamy zderzenie idealnie niesprężyste)?

*Rozwiązanie:*

Zderzenie jest niesprężyste jeżeli zasada zachowania energii kinetycznej nie jest spełniona. Zasada zachowania pędu dalej obowiązuje.

$$mv_0 = (m + M)v_K \Rightarrow v_K = \frac{m}{m + M} v_0$$

$$E_{K0} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad E_{KK} = \frac{(m + M)v_K^2}{2} = \frac{(m + M)m^2 v_0^2}{2(m + M)^2} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)}$$

$$\frac{\Delta E}{E_{K0}} = \frac{E_{K0} - E_{KK}}{E_{K0}} = 1 - \frac{E_{KK}}{E_{K0}} = \frac{M}{m + M}$$

**Zad. 6.** Kula o masie  $m$  poruszającą się z prędkością  $v_0$  zderza się sprężysto ze spoczywającą kulą o masie  $M$ . Przy założeniu, że zderzenie jest centralne, obliczyć prędkość i energię kinetyczną kuli o masie  $m$  po zderzeniu. Kiedy strata energii początkowo poruszającej się kuli jest największa?

*Rozwiązanie:*

Zderzenie jest sprężyste zatem zasady zachowania energii i pędu obowiązuje.

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2 \Rightarrow m(v_0 - v_1) = Mv_2 \quad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} \Rightarrow m(v_0^2 - v_1^2) = Mv_2^2 \quad (2)$$

Dzieląc stronami (2)/(1) otrzymujemy:  $v_0 + v_1 = v_2$ . Stąd:

$$v_1 = \frac{m - M}{m + M} v_0, \quad v_2 = \frac{2m}{m + M} v_0$$

Strata energii początkowo poruszającej kuli jest największa jeżeli  $m=M$ . Wówczas  $v_1=0$ .

**Zad. 7.** Piłeczka pingpongowa po uderzeniu o podłogę traci  $1/k$  część swojej energii kinetycznej. Znaleźć całkowitą drogę, jaką przebędzie piłeczka zrzucona z wysokości  $h$ , aż do chwili zatrzymania się. Współczynnik  $k > 1$ .

*Rozwiązanie:*

Z zasady zachowania energii wynika:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}, \quad \frac{mv_1^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{mv_0^2}{2}, \quad mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}. \text{ Stąd:}$$

$mgh_1 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)mgh \Rightarrow h_1 = \left(1 - \frac{1}{k}\right)h$ . Ogólnie rekurencyjna zależność na  $h_n$  wynosi:  $h_n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)h_{n-1}$ . Zatem droga jaką pokonuje piłeczka pingpongowa wynosi:

$s = h + 2 \sum_{i=1}^n h_i = h + 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)h + 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 h + \dots + 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n h$ . Wyrazy od 2 do  $n$  tworzą ciąg geometryczny o parametrach:  $q = \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ ,  $h_1 = 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)h$ .

Ostatecznie droga wynosi:  $s = h + \frac{h_1}{1-q} = h + \frac{2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)h}{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)} = h + 2(k-1)h$ ,  $s = (2k-1)h$ .

**Zad. 8.** W kabinie windy zawieszono lekki bloczek przez który przerzucono nić. Na jej końcach zawieszono masy  $m_1$  i  $m_2 > m_1$ . Z jakim przyspieszeniem względem windy będą poruszać się ciężarki jeżeli:

- winda stoi nieruchomo,
- winda startuje ku górze,
- winda startuje ku dołowi,
- winda jadąca w dół hamuje?

Przyspieszenie windy  $a = g/2$ . Opory ruchu zaniedbać.

*Rozwiązanie:*

Jeżeli winda stoi należy napisać równania dynamiki dla każdej z mas zaniedbując moment bezwładności bloczka. W przypadku, gdy winda się porusza należy uwzględnić siłę bezwładności (d'Alamberta) działającą na każdą z mas.

a) winda stoi nieruchomo

$$m_2 g - T = m_2 a, \quad T - m_1 g = m_1 a. \quad \text{Stąd: } a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

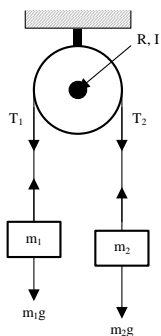
a) winda startuje ku górze

$$m_2 g + m_2 a_w - T = m_2 a, \quad T - m_1 g - m_1 a_w = m_1 a. \quad \text{Stąd dla } a_w = g/2 \text{ otrzymujemy: } a = \frac{3 m_2 - m_1}{2 m_2 + m_1} g$$

**Zad. 9.** Przez nieruchomy krążek o promieniu  $R$  przerzucono nieważką nić, na której końcach zawieszono masy  $m_1$  i  $m_2$ . Moment bezwładności krążka względem jego osi obrotu wynosi  $I$ . Zakładamy, że nić nie może ślizgać się po krążku oraz że nie ma tarcia w jego osi. Znaleźć przyspieszenie z jakim poruszają się obie masy oraz siły naciągu działające na prostoliniowe odcinki nici  $T_1$  i  $T_2$ .

*Rozwiązanie:*

Należy napisać równania dynamiki dla każdej z mas uwzględniając moment bezwładności bloczka.



$$m_2 g - T_2 = m_2 a, \quad T_1 - m_1 g = m_1 a, \quad (T_2 - T_1)R = I \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \Rightarrow T_2 - T_1 = I \frac{a}{R^2}. \quad \text{Rozwiązując układ trzech równań otrzymujemy:}$$

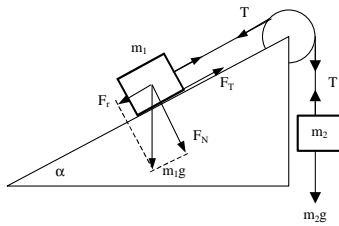
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

$$T_1 = \frac{2m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} m_1 g, \quad T_2 = \frac{2m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} m_2 g$$

**Zad. 10.** W układzie przedstawionym na poniższym rysunku znany kąt nachylenia  $\alpha$  równi względem poziomu oraz współczynnik tarcia  $k$  między płaszczyzną równi a ciałem  $m_1$ . Masę krążka i nici oraz tarcie w krążku zaniedbujemy. Przyjmując, że w chwili początkowej obie masy były nieruchome, wyliczyć stosunek mas  $m_2/m_1$ , przy którym masa  $m_2$ :

- zacznie się poruszać w dół,
- zacznie się poruszać w górę,
- pozostanie w spoczynku.

Rozwiązanie:



$$F_r - T - F_T = m_1 a, \quad T - m_2 g = m_2 a$$

$$F_r = m_1 g \sin \alpha, \quad F_N = m_1 g \cos \alpha, \quad F_T = k F_N = k m_1 g \cos \alpha$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$a = \frac{\sin \alpha - k \cos \alpha - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}. \text{ Stąd rozpatrzeć przypadki: } a > 0, a < 0, a = 0.$$

**Zad. 11.** Oblicz prędkość z jaką będą się poruszały ciężary  $Q_1$  i  $Q_2$  po przebyciu drogi  $s$ . Przy starcie układ znajduje się w spoczynku (tarcie pominać).

Rozwiązanie:

$$T - F_{r1} = m_1 a, \quad F_{r2} - T = m_2 a$$

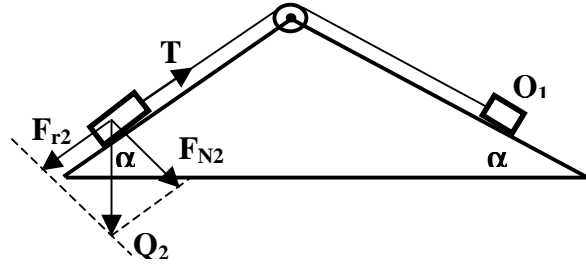
$$F_{r1} = Q_1 \sin \alpha, \quad F_{r2} = Q_2 \sin \alpha$$

$$m_1 = \frac{Q_1}{g}, \quad m_2 = \frac{Q_2}{g}, \text{ stąd: } a = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} g \sin \alpha$$

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a}$$

$v^2 = 2as$ . Po podstawieniu do ostatniego zależności na  $a$  otrzymujemy:

$$v^2 = 2gs \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q_1} \sin \alpha$$



**Zad. 12.** Kamyk utkwiał w oponie o promieniu  $R$ . Koło toczy się po poziomej drodze z prędkością  $v$  (bez poślizgu). Podaj równania na współrzędne  $x$  i  $y$  kamyka w czasie  $t$ . W chwili  $t=0$  kamyk styka się z drogą. Podaj także składowe  $v_x, v_y, a_x, a_y$ .

Rozwiązanie:

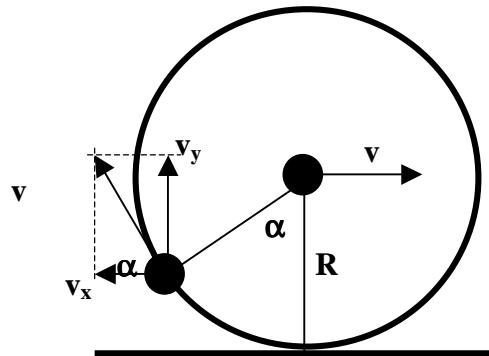
$$\sin \alpha = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \omega = \frac{v}{R}$$

Z powyższego wynika:

$$\alpha = \frac{v}{R} t, \quad v_x = v \cos \frac{v}{R} t, \quad v_y = v \sin \frac{v}{R} t$$

Należy uwzględnić ruch postępowy dla składowej  $v_x$ :

$$v_{xx} = v - v_x = v \left( 1 - \cos \frac{v}{R} t \right)$$



Odp.  $x = vt - R \sin \frac{v}{R} t$ ;  $y = R(1 - \cos \frac{v}{R} t)$ ;  $a_x = \frac{v^2}{R} \sin \frac{v}{R} t$ ;  $a_y = \frac{v^2}{R} \cos \frac{v}{R} t$

**Zad. 13.** Maszyna Atwooda Na początku z obu stron bloczka wiszą równe masy  $M$ . Dokładamy na lewej masie dodatkową masę  $m$ . Układ porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym odległość  $h$ . Dodatkowa masa  $m$  zostaje zatrzymana przez pierścień i dwie równe masy  $M$  kontynuują ruch ze stałą prędkością  $v$ . Wyznacz  $g$  odpowiadające zmierzonym:  $M, m, h, v$ .

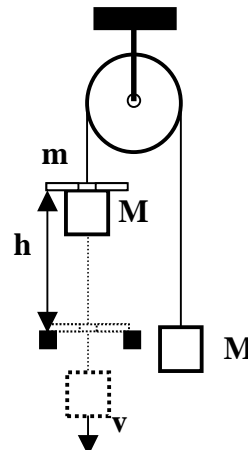
Rozwiązanie:

$$(m + M)g - T = (m + M)a, \quad T - Mg = Ma$$

Z powyższych równań wynika:

$$a = \frac{mg}{m + 2M}$$

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad v = at \Rightarrow v^2 = 2ah$$



$$v^2 = 2h \frac{mg}{m+2M}. \text{ Ostatecznie otrzymujemy:}$$

$$g = \frac{v^2(2M+m)}{2mh}$$

**Zad. 14.** Dwa klocki o równych masach zderzają się. Jeden jest początkowo nieruchomy. Po zderzeniu doskonale sprężystym odskakują z prędkościami równymi co do wartości. Jaki jest stosunek ich mas?

*Rozwiązanie:*

Patrz zadanie 6.

Odp. 3.

**Zad. 15.** Kula toczy się bez tarcia po pochyłym torze zakończonym kołową pętlą o promieniu  $R$ . Z jakiej wysokości mierzonej od najwyższego punktu pętli musi toczyć się kula by nie oderwać się od pętli?

*Rozwiązanie:*

Należy skorzystać z zasady zachowania energii. W tym celu należy obliczyć energię dla  $t=0$  oraz w najwyższym punkcie pętli:

$$E_{p0} = mg(2R+h), E_{pK} = mg2R, E_{KK} = \frac{mv^2}{2}$$

$$mg(2R+\Delta h) = mg2R + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2g\Delta h$$

Aby ciało nie oderwało się od pętli musi być spełniony warunek:

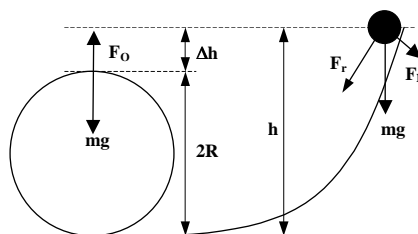
$$F_0 > mg, F_0 = \frac{mv^2}{R}$$

co dla granicznego warunku daje:

$$mg = \frac{mv^2}{R}$$

. Podstawiając zależność na  $v$  otrzymujemy:

$$\Delta h = 0.5R$$



**Zad. 16.** Ciało spoczywające na szczycie gładkiej kuli o promieniu  $R$  ześlizguje się pod wpływem siły ciężkości. Jaką odległość przebędzie zanim oderwie się od kuli?

*Rozwiązanie:*

$$\frac{F_N}{Q} = \cos \alpha \Rightarrow F_N = Q \cos \alpha, F_0 = \frac{mv^2}{R}$$

Z równowagi sił: nacisku i odśrodkowej wynika:

$$F_0 = F_N \Rightarrow Q \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR \cos \alpha$$

$$\frac{R-h}{R} = \cos \alpha \Rightarrow v^2 = g(R-h)$$

(1)

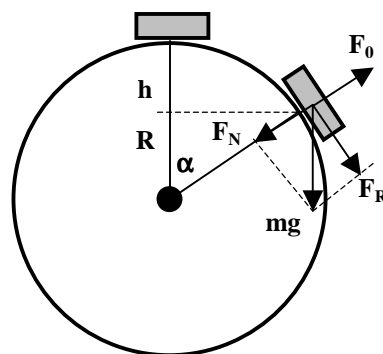
Z zasady zachowania energii wynika:

$$mg2R = mg(2R-h) + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gh$$

(2)

Z równań (1) i (2) otrzymujemy ostatecznie:

$$h = \frac{1}{3}R$$



**Zad. 17.** Masa  $m$  zawieszona na bloczku stałym o masie  $M$  i promieniu  $R$  wykonuje ruch odwijając sznurek i kręcąc blokiem (bez tarcia).

Jakie jest przyspieszenie masy  $m$ ?

*Rozwiązanie:*

Napiszmy równania dynamiki dla masy  $m$  i bloczka  $M$ :

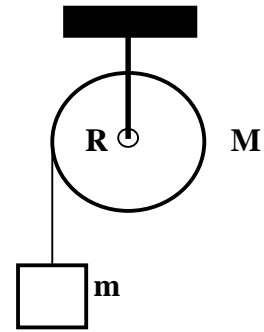
$$mg - T = ma, TR = I\varepsilon \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2, \varepsilon = \frac{a}{R} \quad (2)$$

Wstawiając zależności (2) do (1) otrzymujemy

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}$$



**Zad. 18.** Oblicz momenty bezwładności następujących ciał sztywnych o masie  $m$ :

- Pręta o długości  $L$  względem osi prostopadłej do pręta przechodzącej przez koniec pręta;
- Pręta o długości  $L$  względem osi prostopadłej do pręta przechodzącej przez środek pręta;
- Pustego walca o promieniu  $r$ ;
- Pełnego walca o promieniu  $r$ ;

*Rozwiązanie:*

$$I = \int_M r^2 dm$$

Należy skorzystać z całkowego wzoru na moment bezwładności bryły sztywnej:

Dla każdego z przypadków należy wyrazić fragment masy  $dm$  jako funkcję odległości od osi obrotu i szerokości  $dr$  tego fragmentu masy np. dla pręta:

$$\zeta_v = \frac{m}{V} \Rightarrow dm = \zeta_v dV$$

$$dV = Sdr \Rightarrow dm = \zeta_v Sdr$$

$$I = \int_0^L r^2 \zeta_v Sdr = \zeta_v S \int_0^L r^2 dr = \frac{1}{3} \zeta_v S r^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} \zeta_v S L^3$$

Ponieważ  $m = \zeta_v S L$

ostatecznie otrzymamy:

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$

Odp.  $\frac{mL^2}{3}; \frac{mL^2}{12}; mr^2; \frac{1}{2}mr^2$

